ANÁLISIS EXPERIMENTAL DE ESTRUCTURAS

RESPUESTA SÍSMICA DE UNA ESTRUCTURA
MÉTODO MODAL ESPECTRAL

CONCEPTOS

- ACCIÓN SÍSMICA $\vec{a}(t)$

ESPECTRO DE RESPUESTA

PROCEDIMIENTO DETERMINISTA O ESTOCÁSTICO.

- MODELO DINÁMICO

- MASAS CONCENTRADAS
- MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

- PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES

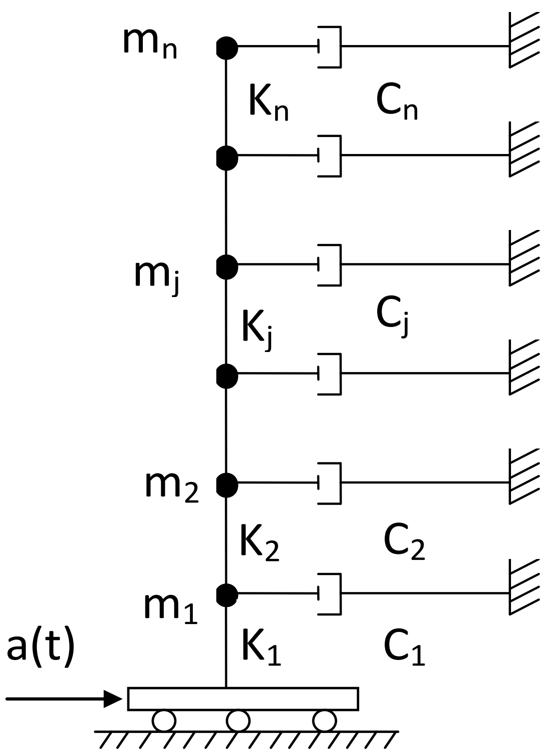
- RESPUESTA SÍSMICA

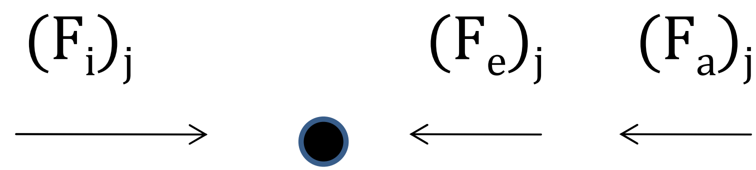
- DESPLAZAMIENTOS
- VELOCIDADES
- ACELERACIONES
- TENSIONES
- DEFORMACIONES

MODELOS SIMPLES DE VARIOS GDL

- EDIFICIOS A CORTANTE: Hipótesis:

- Plantas infinitamente rígidas.
- Los únicos movimientos posibles de los nodos son desplazamientos horizontales.





$F_i \equiv$ Fuerza de inercia.

$F_e \equiv$ Fuerza elástica.

$F_a \equiv$ Fuerza de amortiguamiento.

$$\{F_e\} + \{F_a\} = \{F_i\} \qquad (1)$$

$$\{F_e\} + \{F_a\} = \{F_i\} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}\{F_e\} &= -K\{x\}\\ \{F_a\} &= -C\{\dot{x}\}\\ \{F_i\} &= M\left(\{\ddot{x}\} + J\,a(t)\right)\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1):

$$-K\{x\} - C\{\dot{x}\} = M\left(\{\ddot{x}\} + J\,a(t)\right)$$

$$M\{\ddot{x}\} + C\{\dot{x}\} + K\{x\} = -M\,J\,a(t)$$

$$J = \left(1,1,1,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1,1\right)^T$$

$$M\{\ddot{x}\}+C\{\dot{x}\}+K\{x\}=-M\,J\,a(t)$$

Con: $K_i = \dfrac{12EI_r}{h_r^3}$; I_r ≡ Suma de los momentos de inercia de los pilares situados entre las plantas i e i-1

h_r ≡ Altura de los pilares

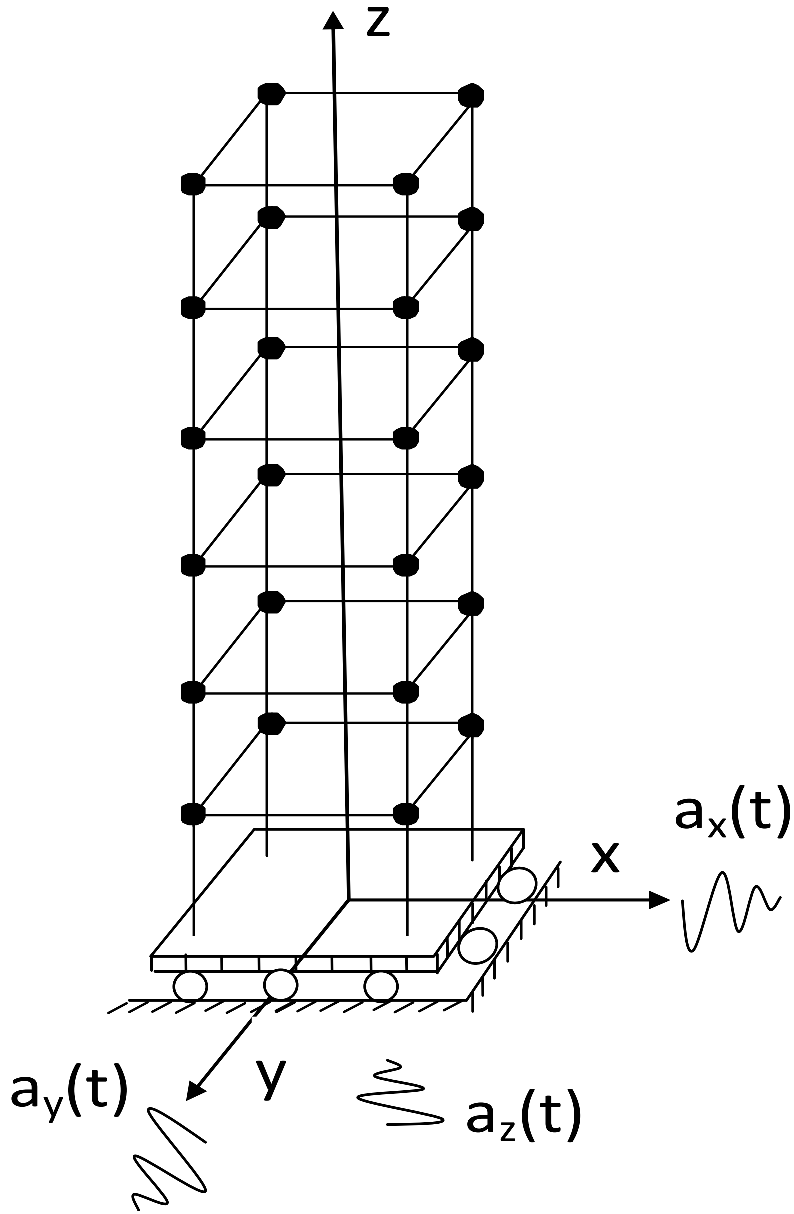
$$K=\begin{bmatrix} (K_1+K_2) & -K_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -K_2 & (K_2+K_3) & -K_3 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -K_3 & (K_1+K_2) & -K_4 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & K_n \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} (c_1+c_2) & -c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -c_2 & (c_2+c_3) & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & c_n \end{bmatrix} \qquad M=\begin{bmatrix} m_1 & & & \Omega \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ \Omega & & & m_n \end{bmatrix}$$

MODELO GENERAL DE PÓRTICOS

- En el caso más general de una estructura tridimensional se consideran 6 gdl por nodo.

- La aceleración se descompone según dos ejes horizontales y uno vertical.



EC DEL MOVIMIENTO:

$$M\{\ddot{x}\} + C\{\dot{x}\} + K\{x\} = -M\left(J_x\, a_x + J_y\, a_y + J_z\, a_z\right)$$

Donde:

$$\{x\}^T = (x, y, z, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots\ldots.)$$

$$J_x^T = (1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0,\ \ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0,\ \ \ldots\ldots.)$$

$$J_y^T = (0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0,\ \ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0,\ \ \ldots\ldots.)$$

$$J_z^T = (0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0,\ \ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0,\ \ \ldots\ldots.)$$

- En general se realiza un análisis sísmico para cada una de las componentes de la aceleración.

- La matriz M es diagonal si se concentra las masa en los nodos.

ESPECTROS DE RESPUESTA

La solución de las vibraciones estacionarias de un sistema de un gdl viene dada por:

$$x(t) = \frac{1}{m\,\omega_1}\int_0^t p(\tau)\,e^{-\xi\omega(t-\tau)}\,\text{sen}\,\omega_1(t-\tau)\,d\tau$$

Si se trata de una excitación sísmica:

$$x(t) = -\frac{1}{\omega_1}\int_0^t a(\tau)\,e^{-\xi\omega(t-\tau)}\,\text{sen}\,\omega_1(t-\tau)\,d\tau \qquad (3)$$

Respuesta de desplazamientos relativos

Derivando (3):

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{\omega_1}\int_0^t a(\tau)(-\xi\omega)e^{-\xi\omega(t-\tau)}\,\text{sen}\,\omega_1(t-\tau)\,d\tau -$$

$$-\frac{1}{\omega_1}\int_0^t a(\tau)\,e^{-\xi\omega(t-\tau)}\,\omega_1\cos\omega_1(t-\tau)\,d\tau$$

$$\dot{x}(t) = -\int_0^t a(\tau)\,e^{-\xi\,\omega(t-\tau)}\cos\omega_1(t-\tau)\,d\tau - \xi\,\omega\,x(t) \qquad (4)$$

Respuesta de velocidades relativas

Derivando de nuevo obtenemos la aceleración total:

$$\ddot{x}^t(t) = \ddot{x}(t) + a(t)$$

$$\ddot{x}^t(t) = -\int_0^t a(\tau)(-\xi\omega)e^{-\xi\omega(t-\tau)}\cos\omega_1(t-\tau)d\tau +$$

$$+\int_0^t a(\tau)e^{-\xi\omega(t-\tau)}\,\omega_1\, sen\,\omega_1(t-\tau)d\tau - \xi\,\omega\,\dot{x}(t) =$$

$$= (-\xi\omega)[\dot{x}(t) + \xi\,\omega\,x(t)] + \omega_1\int_0^t a(\tau)e^{-\xi\omega(t-\tau)}\, sen\,\omega_1(t-\tau)d\tau - \xi\,\omega\,\dot{x}(t) =$$

$$= \omega_1\int_0^t a(\tau)e^{-\xi\omega(t-\tau)}\, sen\,\omega_1(t-\tau)d\tau - 2\xi\,\omega\,\dot{x}(t) - \xi^2\,\omega^2\,x(t) \qquad (5)$$

Aceleración total.

Nota: Es así para que se cumpla la ecuación de equilibrio:

$$m\ddot{x} + c\,\dot{x} + k\,x = -m\,a$$

$$\ddot{x} + 2\omega\xi\,\dot{x} + \omega^2\,x = -a$$

Se definen como espectros de respuesta de desplazamiento y velocidad relativos y de aceleración total, los valores máximos de $\left|x(t)\right|, \left|\dot{x}(t)\right|$, y $\left|\ddot{x}(t)+a(t)\right|$

$$S_d = \left|x(t)\right|_{máx} = \left|-\frac{1}{\omega_1}\int_0^t a(\tau)e^{-\xi\omega(t-\tau)}\operatorname{sen}\omega_1(t-\tau)d\tau\right|_{máx} \qquad (6)$$

$$S_v = \left|\dot{x}(t)\right|_{máx} = \left|-\int_0^t a(\tau)e^{-\xi\omega(t-\tau)}\cos\omega_1(t-\tau)d\tau - \xi\,\omega\,x\right| \qquad (7)$$

$$S_a = \left|\ddot{x}(t)+a(t)\right|_{máx} = \qquad (8)$$

$$= \left|\omega_1\int_0^t a(\tau)e^{-\xi\omega(t-\tau)}\operatorname{sen}\omega_1(t-\tau)d\tau - 2\xi\,\omega\,\dot{x}(t) - \xi^2\,\omega^2\,x(t)\right|_{máx}$$

$$S_d = F(\xi, \omega, a(t))$$

$$S_v = F(\xi, \omega, a(t))$$

$$S_a = F(\xi, \omega, a(t))$$

SEUDOESPECTROS DE RESPUESTA

• Introducidos por Benioff (1934) y desarrollados por Biot, Housner y otros.

• En ingeniería civil, $\xi = 2\% - 20\%$, por lo que $\omega_1 \approx \omega$, pudiéndose despreciar los términos en ξ y ξ^2 en las expresiones de los espectros de respuesta.

• Hudson estableció que en la expresión de $\left|\dot{x}(t)\right|_{máx}$, se puede sustituir *cos* por *sen,* sin que varíen apreciablemente los valores máximos.

• Se introducen así tres nuevas cantidades denominadas *seudoespectro de desplazamiento, velocidad y aceleración*.

$$S.D = \left| -\frac{1}{\omega}\int_0^t a(\tau)e^{-\xi\omega(t-\tau)} sen\,\omega(t-\tau)d\tau \right|_{máx} \qquad (9)$$

$$S.V = \left| -\int_0^t a(\tau)e^{-\xi\omega(t-\tau)} sen\omega(t-\tau)d\tau \right|_{máx} \qquad (10)$$

$$S.A = \left| \omega\int_0^t a(\tau)e^{-\xi\omega(t-\tau)} sen\,\omega(t-\tau)d\tau \right|_{máx} \qquad (11)$$

Se verifica:

$$(S.V) = \omega(S.D) \qquad \text{y} \qquad (S.A) = \omega^2(S.D)$$

- Es frecuente, en ingeniería sísmica, que los seudoespectros así definidos se denominen *espectros*.

- A partir de un acelerograma se puede obtener un espectro o seudoespectro, pero también, a partir de un espectro de respuesta se puede obtener un acelerograma.

CÁLCULO DE LA RESPUESTA MÁXIMA UTILIZANDO ESPECTROS DE RESPUESTA

Partimos de: $M\{\ddot{x}\}+C\{\dot{x}\}+K\{x\}=-M\,J\,a(t)$

Al desacoplar el sistema: $\{x\}=[a]\{Y\}$

$$\ddot{Y}_i+2\,\xi_i\,\omega_i\,\dot{Y}_i+\omega_i^2\,Y_i=\frac{P_i(t)}{M_i} \qquad (12)$$

$P_i\,(t)=-\{a\}_i^T M\,J\,a(t)$

$M_i=\{a\}_i^T\,M\,\{a\}_i$

Luego (12) se transforma en:

$$\ddot{Y}_i+2\,\xi_i\,\omega_i\,\dot{Y}_i+\omega_i^2\,Y_i=\frac{-\{a\}_i^T\,M\,J\,a(t)}{\{a\}_i^T\,M\{a\}_i} \qquad (13)$$

Si en la ecuación:

$$\ddot{y} + 2\xi_i\,\omega_i\,\dot{y} + \omega_i^2\,y = -a(t)$$

La máxima aceleración total es:

$$\left|\ddot{y} + a(t)\right|_{\text{máx}} = S_a$$

En (13), la máxima aceleración total es:

$$\left|\ddot{Y} + a^*(t)\right|_{\text{máx}} = \frac{\{a\}_i^T M\,J\,a(t)}{\{a\}_i^T M\{a\}_i}\left(S_a\right)_i$$

El desplazamiento máximo:

$$\left|Y_i\right|_{\text{máx}} = \frac{\{a\}_i^T M\,J\,a(t)}{\{a\}_i^T M\{a\}_i}\,\frac{\left(S_a\right)_i}{\omega_i^2}$$

El desplazamiento máximo en todos los nodos para el modo i:

$$\{x\}^{i}_{máx} = \{a\}_i \left|Y_i\right|_{máx} = \{a\}_i \frac{\{a\}_i^T M J a(t)}{\{a\}_i^T M \{a\}_i} \frac{\left(S_a\right)_i}{\omega_i^2}$$

En cada gdl el máximo de cada nodo no se produce en el mismo instante de tiempo. La respuesta máxima no será por tanto, igual a la suma de los máximos correspondientes a cada modo.

Se han propuesto diversas fórmulas para hallar $\{x\}_{\text{máx}}$ a partir de $\{x\}_{\text{máx}}^{\text{i(modo)}}$

Una de las más utilizadas es:

$$\{x\}_{\text{máx}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{q}\left(\{x\}_{\text{máx}}^{\text{i(modo)}}\right)^2}$$

Para cualquier otra respuesta, como reacciones, tensiones, etc, se utiliza una expresión análoga:

$$\{R\}_{\text{máx}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{q}\left(\{R\}_{\text{máx}}^{\text{i(modo)}}\right)^2}$$