Como afecta el sismo a las estructuras. Ejemplo de cálculo

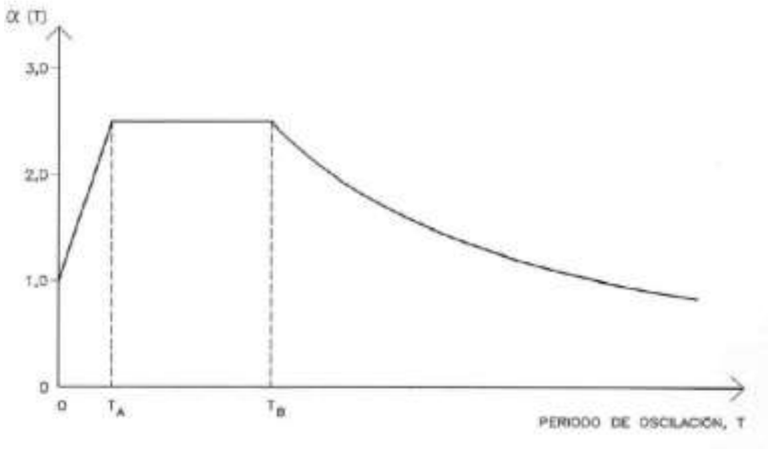
1. Información previa

Espectro de respuesta de un sismo. Espectro de diseño.

Un espectro de respuesta es un gráfico que te da información acerca de las máximas respuestas (aceleraciones, desplazamientos, velocidades....) que puede suceder en una estructura, para un determinado sismo (vibración del suelo que la soporta), bajo un determinado factor de amortiguamiento.

Para el cálculo de las estructuras se utilizan los espectros de diseño. Una estructura no puede diseñarse para un espectro de un sismo en particular, ya que en el siguiente sismo, el espectro será distinto. Lo que se hace es crear un espectro resultado de la envolvente de los espectros de los espectros típicos de una zona. Las normativas te dan distintos métodos para calcularlos que dependen fundamentalmente de la máxima aceleración en roca esperada del emplazamiento y otros factores según el tipo de suelo y otros factores (importancia..etc).

Un espectro de diseño tiene la siguiente forma:



En el siguiente enlace podemos encontrar una explicación detallada de los distintos tipos de espectros, su cálculo y varios ejemplos que ayudan a entender el procedimiento de cálculo.

http://blog.uca.edu.ni/estructuras/files/2011/02/espectros-de-respuesta-y-de-dise%C3%B1o.pdf

2. Ejemplo de cálculo sobre una estructura

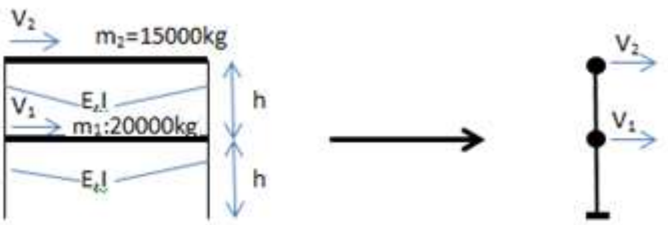
Para comprender como afecta un sismo a una estructura, lo mejor es estudiarlo con un caso particular. Vamos a estudiar cómo afecta el sismo al movimiento horizontal de un pórtico de dos pisos, en los que suponemos la masa de los pilares despreciable y los dinteles infinitamente rígidos (para simplificar el problema). Dado el pórtico de la siguiente figura, obtendremos sus modos de vibración, y dado un espectro de respuesta elástico veremos cómo se calculan las reacciones en la cimentación. Recomendamos leer los siguientes enlaces y conocer las propiedades de los modos de vibración antes de comenzar el cálculo ya que se dan por conocidas las ecuaciones y como se pueden desacoplar utilizando los modos de vibración. En los siguientes enlaces se puede obtener un extenso análisis sísmico de los edificios:

http://nicolatarque.weebly.com/uploads/1/2/6/9/12699783/anlisis_ssmico_edificios.pdf

https://xfma.wordpress.com/2013/02/19/estructuras-sismoresistentes-analisis-modal-espectral-capitulo-2/

Ejemplo de cálculo:

El siguiente pórtico va a ser estudiado, simplificándolo mediante un sencillo modelo de masas concentras. Se calcularán los modos de vibración y se le aplicara un espectro de respuesta de un sismo para calcular las máximas reacciones en la cimentación



Datos:

Módulo de elasticidad: $E := 30000000 \frac{kN}{m^2}$

Sección de los soportes:30cmx30cm

Altura de los soportes: $h := 3m$

Area: $A := 30cm \cdot 30cm = 0.09 m^2$ Inercia: $I := 30cm \cdot \frac{(30cm)^3}{12}$ m_1:20000kg

Dado el pórtico arriba mostrado, los grados de libertad considerados son los desplazamientos horizontales en los dinteles (v_1 y v_2). Su matriz de masas M y su matriz de rigidez son las siguientes:

Matriz de masas:

$$M := \begin{pmatrix} 20000 & 0 \\ 0 & 15000 \end{pmatrix} kg$$

Matriz de rigidez:

Definimos la variable auxiliar k.1: $k_1 := 2 \cdot \frac{12 \cdot E \cdot I}{h^3}$

$$K := \begin{pmatrix} 2 \cdot k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} 3.6 \times 10^7 & -1.8 \times 10^7 \\ -1.8 \times 10^7 & 1.8 \times 10^7 \end{pmatrix} \frac{N}{m}$$

Los modos de vibración de la estructura son los valores w que resuelven la siguiente ecuación, que recordemos, tendremos tantos modos de vibración como grados de libertad hayamos usado:

$$\left| K - w^2 \cdot M \right| = 0$$

$$w_1 = 20.453\ \frac{rad}{s} \qquad w_2 = 50.81\ \frac{rad}{s}$$

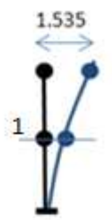
$$f_1 := \frac{w_1}{2\cdot\pi}Hz = 3.255\,Hz \qquad f_2 := \frac{w_2}{2\cdot\pi}Hz = 8.087\,Hz$$

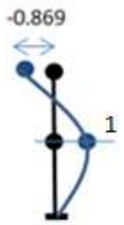
Para obtener las deformadas correspondientes a cada modo de vibración se ha de resolver la siguiente ecuación:

$$\left(K - w^2\cdot M\right)\cdot\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0$$

Donde a1 y a2 corresponden a los valores de la deformada característica asociada a cada modo de vibración. Resolviendo:

$$modo_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.535 \end{pmatrix} \qquad modo_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.869 \end{pmatrix}$$





Para resolver el efecto del sismo en la estructura vamos a exponer brevemente las ecuaciones del movimiento y su resolución usando los modos de vibración. En el caso estudiado las ecuaciones del movimiento vienen definidas como sigue:

$$M\{\ddot{x}\} + C\{\dot{x}\} + K\{x\} = -MJa(t) \qquad (1)$$

Donde:

$$J = (1{,}1)^T$$

La solución a esa ecuación si se trata de una excitación sísmica viene dada por:

$$x(t) = \frac{1}{mw_1}\int_0^t a(\tau)e^{-\xi w(t-\tau)}senw_1(t-\tau)d\tau$$

La ecuación (1) la podemos desacoplar usando los modos de vibración sustituyendo:

$$\{x\} = [a]\{Y\}$$

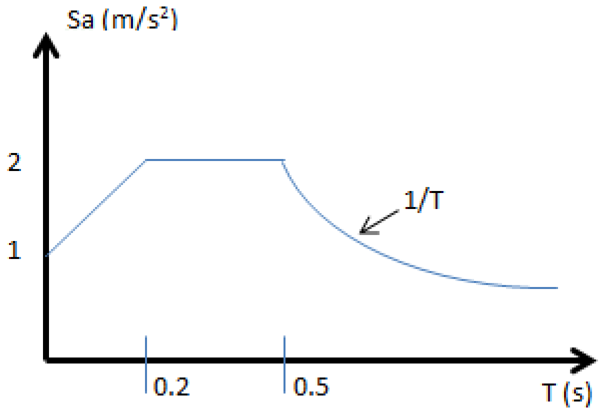
Resolviendo de forma semejante como lo hecho para dicha ecuación (no es objeto de este artículo la resolución detallada) obtenemos:

$$\{x\}_{max}^{modo\,i} = \{a\}_i * \{Y_i\}_{max} = \{a\}_i * \frac{\{a\}_i^T . M.J}{\{a\}_i^T . M\{a\}_i} . \frac{(S_a)_i}{w_i^2}$$

Esta ecuación será la que utilicemos para calcular el máximo desplazamiento de cada modo.

Se define espectro de respuesta de aceleración (Sa) al valor máximo de |ẍ+a(t)|, valor que se obtiene del espectro de respuesta que calculamos con el código entrando con el periodo de vibración de cada modo de nuestra estructura. Se recuerda que para más información se debe consultar el siguiente enlace:

http://blog.uca.edu.ni/estructuras/files/2011/02/espectros-de-respuesta-y-de-dise%C3%B1o.pdf



Para obtener el desplazamiento máximo se debe recordar que en cada grado de libertad el máximo desplazamiento no se produce en el mismo instante de tiempo, por lo que la respuesta máxima no será la suma del máximo en cada nodo. Existen varias fórmulas para calcular el máximo desplazamiento a partir del máximo de cada modo, entra las cuales, una de las más usadas, y que usaremos aquí es:

$$\{x\}_{max} = \sqrt{\sum_{i=1}^{q} (\{x\}_{máx}^{i(modo)})^2}$$

Con esta breve explicación vamos a obtener los valores de nuestro ejemplo:

Para el modo 1 cuya frecuencia es 3.255Hz (T=0.307) entrando en el gráfico del espectro obtenemos una aceleración S_{ai}=2.

Para el modo 2 cuya frecuencia es 8.087Hz (T=0.123) entrando en el gráfico del espectro obtenemos una aceleración S_{ai}=1.615 (obtenida entrando en el tramo de la gráfica de ecuación Sa=1+5T). Introduciendo nuestros datos en la fórmula anterior obtenemos:

$$Y_{1.max} := \frac{modo_1^{T} \cdot M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{modo_1^{T} \cdot M \cdot modo_1} \cdot \frac{2}{w_1^{2}} = 3.716 \times 10^{-3}$$

$$Y_{2.max} := \frac{modo_2^{T} \cdot M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{modo_2^{T} \cdot M \cdot modo_2} \cdot \frac{1.615}{w_2^{2}} = 1.393 \times 10^{-4}$$

Donde: $modo_1^{T} = (1 \quad 1.535)$

$modo_2^{T} = (1 \quad -0.869)$

$$M = \begin{pmatrix} 2 \times 10^{4} & 0 \\ 0 & 1.5 \times 10^{4} \end{pmatrix} kg$$

$w_1 = 20.453 \ \frac{rad}{s}$

$w_2 = 50.81 \ \frac{rad}{s}$

El desplazamiento máximo para el primer modo es:

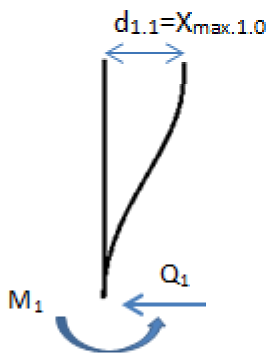
$$X_{max.1} := modo_1 \cdot Y_{1.max} = \begin{pmatrix} 3.716 \times 10^{-3} \\ 5.705 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \ m$$

El desplazamiento máximo para el segundo modo es:

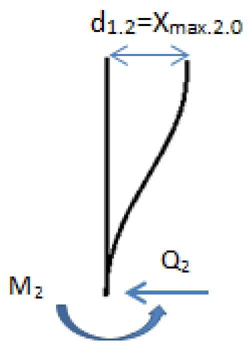
$$X_{max.2} := modo_2 \cdot Y_{2.max} = \begin{pmatrix} 1.393 \times 10^{-4} \\ -1.21 \times 10^{-4} \end{pmatrix} \ m$$

Con estos desplazamientos máximos podemos obtener los esfuerzos máximos en la base de los pilares de la planta baja para cada modo aplicando las fórmulas de resistencia de materiales e imponiendo los desplazamientos máximos:

Modo 1



Modo 2



Modo 1: $X_{max.1_0} = 3.716 \times 10^{-3}$

$$Q_1 := 2 \cdot \frac{12 \cdot E \cdot I}{h^3} \cdot X_{max.1_0} \cdot m = 66.895\,kN$$

$$M_1 := \frac{1}{2} \cdot Q_1 \cdot h = 100.343\,kN \cdot m$$

Modo 2: $X_{max.2_0} = 1.393 \times 10^{-4}$

$$Q_2 := 2 \cdot \frac{12 \cdot E \cdot I}{h^3} \cdot X_{max.2_0} \cdot m = 2.507\,kN$$

$$M_2 := \frac{1}{2} \cdot Q_2 \cdot h = 3.761\,kN \cdot m$$

Luego el Qmax y Mmax por cada pilar en la cimentación usando la fórmula anteriormente expuesta (se recuerda que se divide por dos para obtener los esfuerzos por pilar, ya que al hacer el modelo simplificado de considera un pilar de rigidez doble) sería:

$$Q_{max} := \frac{1}{2} \cdot \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2} = 33.471\,kN \qquad M_{max} := \frac{1}{2} \cdot \sqrt{M_1^2 + M_2^2} = 50.207\,m\,kN$$

Sería interesante comparar estos valores con los que se obtendrían aplicando el método del estático equivalente, que desarrollaremos en otro artículo más adelante.

Referencias y otras fuentes de información sobre el tema:

[1] **http://blog.uca.edu.ni/estructuras/files/2011/02/espectros-de-respuesta-y-de-dise%C3%B1o.pdf**

[2] **http://nicolatarque.weebly.com/uploads/1/2/6/9/12699783/anlisis_ssmico_edificios.pdf**

[3] **https://xfma.wordpress.com/2013/02/19/estructuras-sismoresistentes-analisis-modal-espectral-capitulo-2/**